上越数学教育研究，第29号，上越教育大学数学教室，2014年，pp.21-32.

対数のよさを実感する対数学習の構築

後藤　竜太
上越教育大学大学院修士課程３年

1. はじめに

対数は，高等学校数学Ⅱにおいて，指数関数の後に学ぶ。数学Ⅱを学んだ人の中で，対数とは何かということはもちろん，対数に対する印象が薄い人は少なくないようである。現在の対数学習は，対数が実用上，どのような価値があるかということなどをイメージできる学習内容にはなっていないと懸念される。また，現在の対数学習は，対数を指数関数の逆関数として定義し，この定義を基にして展開されている。現在の対数学習の中で，生徒が対数そのものを考えることはほとんどないと思える。そこで，生徒が対数を学ぶ意義や対数の価値を実感し，生徒の対数イメージを豊かにするためには，対数のよさを実感する対数学習が必要だと考えた。対数のよさを実感する対数学習を考える際には，対数そのものを考える数学的活動に着目していきたい。

本研究は，対数そのものを考える数学的活動に着目し，対数のよさを実感する対数学習とは何かを明らかにし，それが現在の数学教育に位置づけられる可能性を示すことを目的とする。

2. 対数のよさとは何か

対数のよさを実感する対数学習とは何かを明らかにするために，まず対数のよさとは何かを明らかにする必要がある。そのために，片野(1995)，小倉(1997)，志賀(1999)，Panagiotou(2011)，三浦(2013)を基に，対数がどのような必要性で生まれ，どんなところにどのように利用されてきたのかという視点で，対数の歴史的展開を概観し，対数のよさとは何かを考察していく。また，対数学習がどのような変遷をたどってきたのか，当時の対数学習はどのような学習内容だったのかという視点で，戦後直後から現在までの学習指導要領と教科書を分析することで，対数のよさとは何かを考察していく。

2.1 歴史的展開から見た対数のよさ

対数の歴史的展開を概観し，対数のよさとは何かを考察した。その結果，次の２つを対数のよさと考えた。

① 膨大な自然数どうしのかけ算を，各数の対数の和に変換できる。
② 小さな数を大きな数で扱える，または大きな数を小さな数で扱える。

①について考察する。対数表を用いることで，膨大な数のかけ算が対数の和でできるようになった。対数表の完成によって，煩雑な計算にかける労力を大幅に減らし，天文学や商業の発展に大きな貢献をもたらした。積の対数がその因数の対数の和に変換されるという性質によって，膨大な数の計算を簡略化できることを筆者は対数のよさと考える。

②については, 例えば, $\log_{10} 10000=4$, $\log_{10} 0.0001=-4$ のように，桁の大きい数の対数をとることによって桁の大きい数のスケールを小さく，桁の小さい数の対数をとることによって桁の小さい数のスケールを大きくと, 感覚的に数を扱いやすくなる。この対数の考え方は, マグニチュード，pH など，多様なサイズの量を比較するために利用されている。対数の概念によって，計算を簡略化できるだけでなく，事象・事物の本質が捉えられることを筆者は対数のよさと考える。

2.2 過去の教科書から見た対数のよさ

過去の対数学習の内容から見出せる対数のよさについて考察した。その結果，次の3つを対数のよさと考えた。

③　複雑な累乗根の計算を，その数の対数をとることで求めることができる。
④　計算尺を用いることで，複雑な乗除計算などが容易になる。
⑤　対数方眼紙を用いることで，数量関係を単純化して表せる。

③について考察する。例えば，$\sqrt[3]{0.297}$などの複雑な累乗根の値を求めることを例にして説明する。$\sqrt[3]{0.297}$の値を求めるためには次の計算方法による。

$$
\begin{aligned}
\log_{10}(0.297)^{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{3}\times\log_{10} 0.297 \\
&= \frac{1}{3}\times(\log_{10} 2.97-\log_{10} 10) \\
&= \frac{1}{3}\times(-1+0.4728) \\
&= \frac{1}{3}\times(-3+2.4728) \\
&= -1+0.8243
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{0.297} \fallingdotseq 0.6673$$

（数学学習指導研究会，1952，p.202）

上記のように, $\sqrt[3]{0.297}$ の値を求めるためには, まず$\sqrt[3]{0.297}$ の常用対数をとる。次に, 対数の性質に従って式を変形し, $\log_{10} 2.97$ の値に対して常用対数表を用いて求め，その具体的に出た数値に対して，逆対数表を用いることで求めることができる。これは対数にしかできないことである。このような複雑な累乗根の値を，その対数をとることで求められることを筆者は対数のよさと考える。

④について考察する。計算尺とは，次の図１のように，対数尺というものさしを使い，一方の対数尺を固定し，もう一方の対数尺を滑らせて，固定した対数尺の目盛りにもう一方の対数尺の目盛りを合わせることで，複雑な乗除計算などが容易にできるようにしたものである。

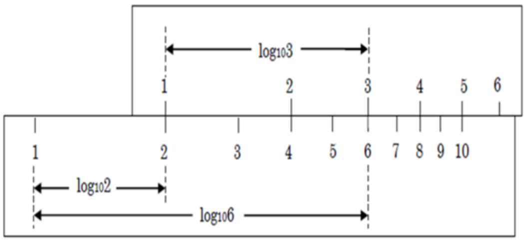

図１：計算尺
（筆者による）

対数尺とは，次の図２のように，目盛り1から2，3，4，5，・・・，x の距離がそれぞれ $\log_{10} 2$，$\log_{10} 3$，$\log_{10} 4$，$\log_{10} 5$，・・・，$\log_{10} x$となっているものさしである。

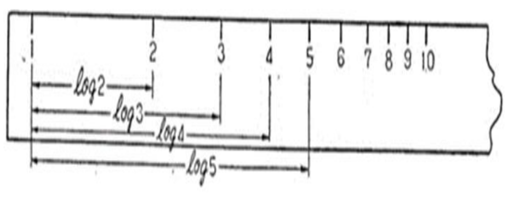

図２：対数尺
（清水辰次郎ら，1951，p.136）

計算尺を用いることで，かけ算ができる

ことを2×3を例にして説明する。計算尺で2×3というかけ算をするためには, 図1のように下の対数尺を固定し，上の対数尺の目盛り1を下の対数尺の目盛り2に合わせ，上の対数尺の目盛り3の下を読むと，2×3の答え6が得られる。これは，下の対数尺の目盛り1から目盛2までの距離が$\log_{10} 2$，上の対数尺の目盛り1から目盛り3までの距離が$\log_{10} 3$で，下の対数尺の目盛り1から目盛2までの距離$\log_{10} 2$と上の対数尺の目盛り1から目盛り3までの距離$\log_{10} 3$を足すと，$\log_{10} 2+\log_{10} 3=\log_{10} 6$となり，上の対数尺の目盛り3の下が，下の対数尺の目盛り6になるからである。つまり，計算尺は対数の性質を利用して乗除計算などができる仕組みになっている。このように，対数の性質を利用することで，複雑な乗除計算などが簡単になることを筆者は対数のよさと考える。

⑤について考察する。対数方眼紙とは，次の図3のように，対数尺を利用した方眼紙である。図3の左は縦軸が対数目盛である片対数方眼紙，右図は縦軸，横軸がともに対数目盛である両対数方眼紙である。

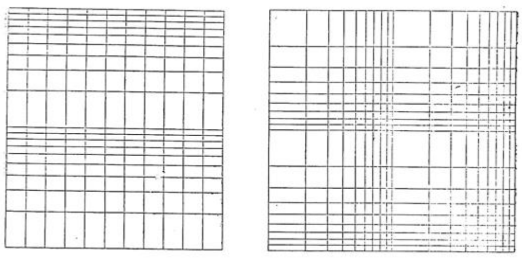

図3：対数方眼紙
(菅原正巳，1951，p.254)

方眼紙に数値の小さな点をプロットするとき，正確にプロットするのが難しく，グラフを書くことができないときがある。また，方眼紙に数値の大きい点をプロットするとき，方眼紙からはみ出てしまい，何枚もの方眼紙が必要になるときがある。しかし，対数方眼紙を使うと，数値の小さな点も，大きな点も正確にプロットすることができるので，対数方眼紙は取り扱う数値の幅が大きな問題でよく使われる。

また，世界の人口推移のように一定期間に一定の倍率で変化する関係は，一般に関数$y=\mathrm{c}\cdot a^x$で表され，次の図4のようなグラフになる。

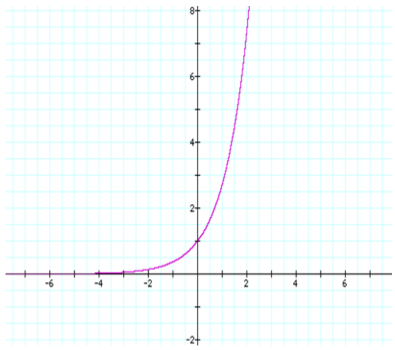

図4：方眼紙に描いた指数関数のグラフ

例えば, 片対数方眼紙に関数 $y=\mathrm{c}\cdot a^x$のグラフを描くとすると，片対数方眼紙は一方の軸が対数目盛であるから，$y=\mathrm{c}\cdot a^x$の右辺に常用対数をとることになる。実際，$\log_{10} y = \log_{10} c+x\cdot\log_{10} a$となる。つまり，片対数方眼紙に指数関数のグラフを描くと，傾き$\log_{10} a$，切片$\log_{10} c$ である直線のグラフとなる(図5)。

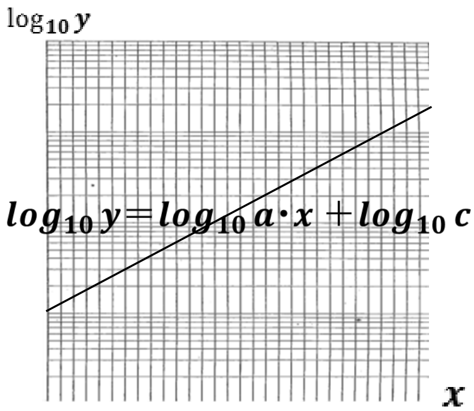

図5： 片対数方眼紙に描いた指数関数のグラフ

対数方眼紙にデータをプロットしたときに，グラフが直線で表された場合(または，直線とみなせるような場合)，その傾きを求めれば，べき乗関数を求めることができる。一般の方眼紙にデータをプロットしても，そのデータがどんな関数になっているかわかりにくいが，対数グラフで書くと式の形がわかることがある。このように，対数方眼紙を使うことで，グラフが書きやすくなるだけでなく，数量関係を単純化して表せ，事象の関数を解析するのに役立つことを筆者は対数のよさと考える。

3. 主体的な学びと対数のよさの関係

現在の数学教育では，生徒の主体的な学びを起こす数学的活動を授業に盛り込むことが強調されている。対数のよさを実感する対数学習を考える上で，主体的な学びと明らかにした対数のよさにはどのような関係があるのかを明らかにしておく必要がある。本節では，湊・浜田(1994)や蒔苗(2011)を基に，主体的な学びと対数のよさにはどのような関係があるのかを考察していく。

湊・浜田(1994)は主体的学習の意味を明確にするために，学習における自主性，自発性の概念と，主体的学習との異同を次のように検討している。

広辞苑によれば自主とは他人の保護や干渉を受けず，独立して行うことであり，自発は自ら進んで行うこと，とされている。自主的・自発的学習とは，他からの強制ではなく，自らの意志に従って行われる学習であり，そこには積極的な学習意欲が存在していると言えるだろう。これに対して主体的学習とは，自主的・自発的学習を前提にしながらも個人性・内面性に基づき，具体的世界との関わりにおいてより密接で，自己の価値規準によって学習することにより自己を創造するとともに自分自身の意味を構成するものであり，学習内容自体を自分のものに作りかえることをも意味している。自主的・自発的学習が学習内容自体を一定のものをみなしていても成立するのに対して，主体的学習では，同一の学習内容を学習していても，学習者により，それぞれ意味づけは異なり，別のものを作り変えることが予想されているところに，自主的・自発的と主体的の 2 つの学習の間には本質的な違いがある(湊・浜田, 1994, p.62)。

蒔苗(2011)は，「よさ」の用語の起源について考察し，「よさ」の用語が数学教育に取り上げられた背景や，当時の数学教育の思想を明らかにすることを目的としている。

蒔苗(2011)によれば，「よさ」は平成元(1989)年の学習指導要領の改訂に際し，小学校算数，中学校数学，高等学校数学の目標に取り上げられ，その後の学習指導要領改訂においても，「よさ」は目標概念として引き継がれている。「よさ」の用語は，昭和26(1951)11 月発行の『中学校高等学校学習指導要領数学科編(試案)』と同年 12 月発行の『小学校学習指導要領算数科編(試案)』，平成元(1989)年の学習指導要領に取り上げられている。『中学校高等学校学習指導要領数学科編(試案)』の「単元による指導計画のたて方」に，「数学のよさ」として，正確さ，的確さ，気楽さ，能率のよさが取り上げられ，数学の機能や役割として「よさ」が取り上げられている。よさ」への強調は，認知的な面よりも情意的な面へ配慮することを述べており，数学を学習するための内発的な意欲や動機を強くすることを目指している。こうした「よさ」を分析することによって，特定の学習内容を取り上げる際の「なぜ」が明らかになり，そのための教材や指導法を考えることができる。このように「よさ」には，子どもの主体的な学びの根本にある意欲や動機としての側面と，

学習指導における指導内容や指導法を決定づける根拠や出発点としての側面とを見ることができる。(蒔苗，2011，pp.2－8 の筆者による要約)

以上のことを踏まえると，主体的学習には自主的・自発的学習が前提であり，どちらの学習にも子どもの積極的な学習意欲が存在している。この主体的学習において，学習者によりそれぞれ意味づけが異なるところにはよさの実感が関わっており，どのようによさを実感するかによって，その数学に対する意味づけも異なってくる。本研究では，湊・浜田(1994)のいう「主体的学習」におけるよさの実感という要素を重視し，これまでの「主体的学習」を「主体的な学び」と言い換えることにする。

また，対数のよさには，子どもの主体的な学びの根本にある意欲や動機としての側面があることが言える。しかし，生徒ははじめから対数のよさを実感するわけではない。生徒が対数のよさを実感するために必要な学習とは何かを明らかにしなければならない。生徒が対数のよさを実感するためには，対数学習の始めに，対数に関する具体的な問題を提示し，その問題を生徒が学習意欲を持って問題解決に取り組むような生徒の自主的・自発的学習を起こすことが必要となる。

よって，主体的な学びと対数のよさには，次の図 6 の関係があり，上記のような生徒の自主的・自発的学習によって対数のよさを実感することから始め，対数のよさを実感することで学習意欲が高まり主体的な学びに繋がる，主体的な学びによって新たな対数のよさを実感する，というサイクルに組み込むことにより，対数のよさを実感する対数学習を進めていくことができるといえる(楕円は 1 つの学習を表し，一番下の楕円は対数学習の始めの学習を表す)。

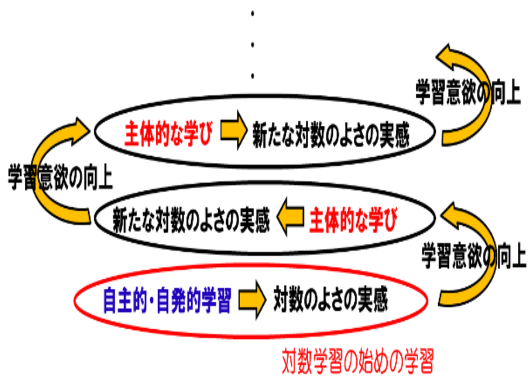

図 6：主体的な学びと対数のよさの関係
(筆者による)

4.　対数のよさを実感する対数学習とは何か

本節では，まず，これまで得られた知見を基に，主体的な学びという視点で，対数のよさを実感する対数学習とは何かを考察する。その上で，具体例を示していきたい。

4.1 対数のよさを実感する対数学習

これまで得られた知見を基に，主体的な学びと対数のよさの関係という視点で，対数のよさを実感する対数学習とは何かを考察する。対数のよさを実感する対数学習を次の 2 点として考えた。

① 対数のよさと自然に結びつく問題を生徒が解決していくことを通して，対数の存在や性質を生徒自身で発見できる学習。
② 対数を利用したものや事象について，なぜ対数が利用されているのかを生徒が解決する学習。

現在の対数学習では，対数は指数関数の逆関数として定義され，それを基に対数学習が展開されているために，対数を学ぶ意義や対数の価値を実感できない内容に陥っていると言える。よって，とらえさせたい対数のよさと自然に結びつく問題を生徒が解決していく活動を通して，対数の存在や

性質を生徒自身で発見できる学習を行うことが重要だと考える。特に，対数学習の導入において指数関数に従属せずに対数を定義する必要がある。

また，対数の理解には教科書に載っている対数に関する問題を解けるだけでは対数を理解したことにはならないと考える。対数の理解には，対数を利用したものや事象について，なぜ，どのように対数が利用されているのか，そして対数がどんなことに都合がよいのを理解することも必要である。それらを解決することで対数のよさを実感することができると考えるからである。そのためには，対数を利用したものや事象に関する問題を設定し，対数を利用したものや事象になぜ対数が利用されているのかを考える活動を通して，その問題を生徒自身で解決していく学習が必要だと考える。

とらえさせたい対数のよさと自然に結びつく問題や対数を利用したものや事象に関する問題を生徒自身で解決していくためには，その問題が生徒の問題にならないといけない。その学習での問題が生徒の問題になることで生徒の主体的な学びへとつながるからである。そのためには，教師の働きかけや生徒の活動が必要であると考える。そこで，生徒の主体的な学びにつながるための教師の働きかけや生徒の具体的な活動を含めて，対数のよさを実感する対数学習の具体例について考察していく。

4.2　対数のよさを実感する対数学習の具体例

ここでは，生徒の主体的な学びにつながるための教師の働きかけや生徒の具体的な活動を含め，対数のよさを実感する対数学習の具体例を示し，主体的な学びという視点で考察していきたい。

4.2.1　等差数列と等比数列の表の仕組みを考える学習

この学習は，対数学習の導入に位置づく学習である。次の表 1 に示す等差数列と等比数列の表の仕組みを生徒が考えることによって,「かけ算を対数の和に変換できることで，乗除算が簡略化される」という対数のよさを実感できると考える。

表 1：等差数列と等比数列の対応表
(筆者による)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

それは，表 1 の下の行の 2 つの数のかけ算が上の行の数のたし算でできる仕組みがあるからである。例えば，下の行の 64 と 512 という数のかけ算を考えた時に，それぞれの上の数 6 と 9 を足すと, その和が 15 となり，15 の下が 64 と 512 の積になっており，下の行の数のかけ算が上の行の数のたし算でできることがわかる。つまり，この表の仕組みを生徒が考えることで，生徒は「かけ算を対数の和に変換することで，乗除算などが簡略化される」という対数のよさを実感できると考える。また，表 1 の上の行の数が 3 で下の行の数が 8 の列を見た時に，表 1 の下の行の数は 2 を底とする数であるので，3 は 2 を底とする 8 の対数という関係として見ることができる。つまり，この表を利用することによって，指数関数に従属せずに対数を定義できる。上記の対数のよさを生徒が実感するための学習として，上の表の関係のように，一定の時間に一定の割合で増加する細菌の増殖を問題にして，その問題を生徒が解決する学習を考えることができる。

例えば,「ある種の細菌は 1 時間経つと，前の個数の 2 倍に増殖するという。今，細菌 1(万個)がいるとすると，細菌の個数が 4096(万個)の 2048 倍になるのは，今の時間から何時間後か。」という問題を解決する

ことで,「かけ算を対数の和に変換することで，乗除算などが簡略化される」という対数のよさを実感できると考える。この問題を解決する前に，まず細菌が増えていく様子を生徒がイメージできるような教師の働きかけがいる。例えば，1 時間後，2 時間後，3 時間後までの細菌の個数を生徒に考えさせ，細菌が増えていく様子のモデルを黒板に書くことが考えられる。次に，3 時間後までの細菌の個数までを考えさせた上で, 12 時間後の細菌の個数を生徒に考えさせる。このとき，表を利用している生徒がいたら，表を黒板に書くようにする。そして, 12 時間後の個数が 4096(万個)であることを理解させた上で，上の問題について考えさせることで, 生徒は自分の問題となり，解決しようとすると考える。この問題を解決するために，生徒は計算をしたり，表の中から規則性や関係式ができかどうか表の数の並びを見比べたりと，試行錯誤する活動が予想できる。生徒が対数のよさを実感するためには，表 1 において，「下の行の数のかけ算が上の行の数のたし算に対応している」という関係を生徒が見つけることが必要である。そのための教師の働きかけとして，上の問題の答えが出たときに，なぜその答えになるのか，その理由を生徒に考えさせることがいる。そうすれば，表の中の数の並びや関係を見てみようと考え，「下の行の数のかけ算が上の行の数のたし算に対応している」という関係を見つける生徒がいると予想されるからである。

また,「0.5 時間後の細菌の個数は何万個か」というような問題を考えさせ，この問題を生徒が解決する活動によって，表 1 の列と列の間の数を考えることができることを生徒が認識できる。つまり，表 1 にない細かい対数の存在を生徒に認識させることができる。

このように，表 1 のような等差数列と等比数列の表の仕組みを生徒が考えることは,生徒の主体的な学びにつながり，対数のよさを実感することができると考える。

4.2.2 計算尺の仕組みを考える学習

計算尺の仕組みを考える学習は，対数学習の展開部分に位置づく学習である。計算尺の仕組みを考える学習によって,「対数の性質を利用することで，乗除計算などが簡単になる」という対数のよさを実感することができると考える。

この学習は，生徒になぜ計算尺でかけ算ができるのか，その理由を考えさせる学習である。そのための教師の働きかけとして，ものさし(計算尺)を使っている様子や過去や現在において計算尺がどんなところに利用されているのか，その様子がわかるような写真や画像を生徒に見せる。次に，このものさしにどんなことができるのかを生徒に示す。そのための教師の働きかけとして，簡単なかけ算が計算尺を用いて求まることをいくつか示す。ものさしをスライドするだけでかけ算の答えが求まることに生徒は不思議さや驚きを覚え，生徒の問題になって主体的な学びに繋がると考える。次に，なぜものさしをスライドするだけでかけ算の答えが求まるのか，計算尺の仕組みを生徒に考えさせる。対数のよさを体験的にとらえさせるために，具体的な操作などを取り入れる。試行錯誤をすればするほど，よりよい解決方法に対する印象は強くなり，捉えさせたい対数のよさもより強く感じることができると考える。具体的には，参考文献にも示してあるように，計算尺推進委員会作製の紙の計算尺を生徒に与え，生徒がものさしをいろいろ動かして試行錯誤しながら，計算尺でかけ算ができる理由について考えさせる活動を行う。この活動によって，計算尺には対数の性質が利用されていることを生徒自身で発見できると考える。それは，この学習の前に等差数列と等比数

列の表の仕組みを考える学習によって，対数の性質を考えているからである。また，計算尺には常用対数の大きさがある目盛りからある目盛りまでの長さとして見えるからである。対数の大きさがものさしの長さとして見えるので，対数そのものの性質として実感できると考える。

また，一般的なものさしは目盛り 0 を基準にものの長さを測るが，この計算尺は目盛り 1 を基準としている。この違いに気づく生徒もいると考えられるので，なぜ目盛り 1 を基準になっているのかを生徒に考えさせる。そうすることで，$\log_{10} 1$の大きさを考えようとする生徒がいると考えられる。$\log_{10} 1=0$ の理解が深まると考える。例えば，先の図 1 のように目盛り 1 から目盛り 2 までの長さが$\log_{10} 2$，目盛り 1 から目盛り 3 までの長さが$\log_{10} 3$として存在することを基に，$\log_{10} 1$という長さが存在することを仮定すると，$\log_{10} 1$の値は常用対数表から，$\log_{10} 1=0$ とわかるので，目盛り 1 が基準になっていることがわかる。

このように，計算の仕組みを生徒が考えることは，生徒の主体的な学びにつながり，対数のよさを実感することができると考える。

4.2.3 対数方眼紙を用いた学習

対数方眼紙を用いた学習は，対数学習の応用に位置づく学習である。対数方眼紙を用いた学習によって，「対数方眼紙を用いることで，現象の解析に役立つ」という対数のよさを実感することができると考える。この学習では，次の表 2 のような人口問題について生徒に考えさせる。

表 2：世界の人口推移
(江藤邦彦，1985，p.131)

年度(年)	1960	1955	1960	1965	1970	1975	1980
人口(万人)	2051	2722	2986	3288	3610	3967	4374

人口問題を問題に取り上げたのは，人口問題はニュースでもよく取り上げられ，学校の授業でも扱われており，生徒にとって身近であると考えたからである。

授業の導入として，将来の人口が記載されているデータを生徒に与え，「将来の人口をどのように求めているのか」ということを考えさせる。この問題を考えさせることで，将来の人口の求め方について疑問を持ち，生徒は考える必要性を持つと考える。必要感が強ければ，解決できたときの成就感もつよくなり，とらえさせたいよさをより強く感じることになる。また，問題の解決に向けて，生徒は主体的に取り組むと考える。

次に，どうやったら将来の人口がわかるのか，生徒に将来の人口を求める方法を考えさせる。予想される生徒の反応として，現在までの人口のデータを基にグラフにして，そこから傾向を読み取るという解答が考えられるので，方眼紙を用意しておく。このとき，例えば 1 枚の方眼紙に表 2 のデータをプロットすると，ほぼ直線のグラフになる。しかし，将来の人口を求めようとすると，実際のデータと誤差が生じる。実際，世界の人口推移のように一定期間に一定の倍率で変化する関係は，一般に関数$y=c\cdot a^x$で表され，先の図 4 のようなグラフになるからである。

また，図 4 のように値が急激に増加していくグラフになったり，ほぼ直線のグラフになったりすることで先が予想しにくかったり，先のデータを求めたときに実際のデータとの誤差が生じたりする。つまり，線形方眼紙に表 2 のデータをプロットさせてグラフを描いて先の人口を求めようとすると，これらの困難や問題が生じる。そのことを生徒が実感し，違う方法を考えようとする。

次に，例えば片対数方眼紙にそのグラフ

を書いてみるように促し，先の人口を考えさせる。対数方眼紙にそのグラフを描くと，そのグラフは直線になり，生徒は驚きや不思議さを感じるだろう。直線になることで先の人口を生徒自身で求めることができる。

また，生徒が線形方眼紙と対数方眼紙に表2のようなデータをプロットし，そのグラフを描く活動を通して,「なぜ直線のグラフになるのだろう」と生徒が疑問を持つことが考えられる。このような疑問を生徒が持つことで対数方眼紙の仕組みを生徒が考える学習に繋がる。生徒が対数方眼紙の仕組みを理解するためには，線形方眼紙と対数方眼紙の違いに生徒が着目する必要がある。なぜ直線のグラフになるのかを生徒が考えるときに，方眼紙と対数方眼紙にグラフを描いたことでグラフの違いが出たことに気づく生徒がいるだろう。そのときの教師の働きかけとして，なぜ対数方眼紙にグラフを描くと，直線になるのかを考えさせる前に，計算尺の仕組みを考える学習において計算尺の仕組みについて理解している生徒がいれば，対数方眼紙の軸の一方の軸が対数軸になっていることに気づくことが予想される。そのような生徒がいればその生徒を取り上げ，対数方眼紙の軸が対数軸になっていることと方眼紙と対数方眼紙との違いについて説明する。

次に，対数方眼紙に描かれたグラフはどのような直線の式で表されるのかを生徒に考えさせる。直線の式を生徒が求めることができたら，世界の人口の推移の関係式はどのような式で表されるのかを考えさせる。

このように，生徒が線形方眼紙と対数方眼紙にグラフを描き，そのグラフの違いについて考える活動を通して,「対数方眼紙を用いることで,事象の関数の解析に役立つ」という対数のよさを実感することができると考える。

5. 対数のよさを実感する対数学習の現在の数学教育への位置づけの可能性

本節では，明らかにした対数学習を基に調査授業，生徒へのアンケート調査やインタビュー調査を実施し，それらのデータを［研究課題2］で明らかにした主体的な学びと対数のよさの関係という視点で分析・考察していく。

5.1 調査の概要

調査授業については，明らかにした対数学習の導入部分に焦点をあて，調査授業の内容を考えた。現在の対数学習の導入では，数学的知識を教えるところから始まっているようである。しかし，そうではなく，生徒が対数のよさと自然に結びつく問題を解決しようと考え，生徒の活動を通して，生徒が学ばせたい数学的知識を得ることができるように，計2時間の授業を計画し，調査授業の指導案を作成する。アンケート調査については，事前アンケートと事後アンケートを実施することで，調査授業を通して生徒が対数に対してどのように考えたか,対数や数学に対する見方や考え方がどのように変わったか，その変容が見られるように作成する。インタビュー調査については,アンケート調査で追究しきれなかった部分を明らかにしようと考え，事後アンケート実施後に行うことにする。

これらの視点を基に,平成25年10月21日，24日，28日，29日，31日の5日間,長野S高等学校3年生選択クラス(数学)11名，数学Ⅱ「対数関数」の単元内の導入部分として，第1時「等差数列と等比数列の表の仕組みを理解する」，第2時「対数の存在を認識し，対数の性質を考える」を予定し，計3時間実施した。調査授業の様子は，2台のビデオカメラと筆記により記録し，後に，これを基にプロトコルを作成した。授業プロトコルやアンケート調査・インタビュー調査の結果を基に，調査授業を

通して，生徒の自主的・自発的学習によって，生徒が対数のよさを実感し，学習意欲が向上したかを分析・考察していく。

5.2 分析の視点

調査授業，アンケート調査，インタビュー調査の結果に対して，以下の 3 つの分析の視点を基に分析・考察していく。

① 生徒の自主的・自発的学習が行われていたか。
② 生徒が対数のよさを実感したか。
③ 生徒の学習意欲が向上したか。

上記のような分析の視点にした理由は，対数学習の導入部分に位置づく学習を対象とした調査授業を通して，生徒の自主的・自発的学習によって，生徒が対数のよさを実感し，学習意欲が向上するという一連の流れを見ることができれば，その後の学習において，生徒の主体的な学びによって，新たな対数のよさを実感し，学習意欲が向上する，といったサイクルの関係が生じると考えたからである。

5.3 調査授業の分析と考察

調査授業の第 1 時に着目していく。調査授業第 1 時の授業目標は，「細菌の問題を解決することを通して，等差数列と等比数列の表にかけ算がたし算に変換される仕組み，わり算がひき算に変換される仕組みがあることを理解する。」である。また，調査授業第 1 時の流れは，以下の通りである。

① 細菌の個数について考える。
(細菌は 1 時間経過すると，2 倍に増殖し，最初に 1(万個)いるとする。)
② 12 時間後の細菌の個数について考える。
③ 12 時間後の細菌の個数 4096(万個)の 2048 倍の個数になるのは何時間後かを考える。
④ 細菌の個数が 4096(万個)を 2048 倍した個数になるのが，23 時間後である理由を考える。
⑤ 時間と細菌の個数の関係を表す表(等差数列と等比数列の表)の仕組みを考える。

第 1 時の授業のポイントは，④と⑤の場面である。この 2 つの場面において，生徒が等差数列と等比数列の表の仕組みや対数についてどのように考えたかを上記の 3 つの分析の視点で分析・考察していく。

5.3.1 生徒の自主的・自発的学習が行われていたか

先に述べたように，湊・浜田(1994)によれば，自主的・自発的学習とは，他からの強制ではなく，自らの意志に従って行われる学習である。この学習が調査授業を通してなされていたかどうかを，Kyo の思考活動に着目していく。

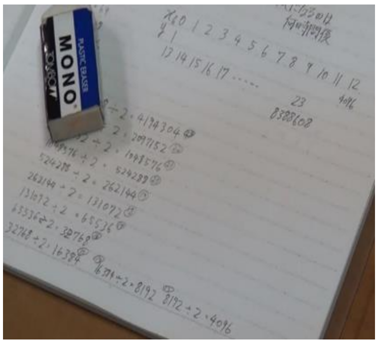

図 7：Kyo の記述

調査授業第 1 時「細菌の個数が 4096(万個)を 2048 倍した個数になるのが，23 時間後である理由を考える場面」における Kyo の様子をビデオで見たところ，ある式をノートに書いていることを確認した(図 7)。Kyo は，23 時間後の個数が 8388608(万個)であることを他の生徒が発見したことを基に，8388608(万個)をずっと 2 で割っていったらどうなるのか，8388608 をずっと 2 で割っていき，12 時間後の細菌の個数である 4096(万個)になるかどうかを確かめてい

る。それは，調査授業第２時の中で，教師がその Kyo の考えを紹介していることからわかる。この Kyo の行動は，教師から言われて行動したものではなく，「本当に 23 時間後かどうかを確かめたい」という意欲の基で現れた行動であると考えられる。つまり，Kyo には積極的な学習意欲が存在しており，自主的・自発的学習がなされていたと考えられる。

5.3.2 生徒が対数のよさを実感したか

調査授業第１時「時間と細菌の個数の関係を表す表(等差数列と等比数列の表)の仕組みを考える場面」では，次の表３に示すように，時間と細菌の個数の関係を表す表には,「下の行の数の積が上の行の数の和に対応する」という関係があることを全体で共有した。この仕組みや対数に対して生徒がどのように考えたかを Kubo と Kyo のインタビューに着目していく。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

表３：等差数列と等比数列の表の仕組み

筆者は生徒に対して，調査授業の中で扱った時間 x と細菌の個数 y の関係を表す表の仕組みに対してどのように感じたのかをインタビューした。その中で，Kubo は，「例えば，大きい数を求めたかったりしたときに小さい数だけわかってれば，大きいのをすぐ出せるなぁって思ったときに，便利だなぁみたいな…。」と発言している。また，Kyo は，「人口の計算とかなんか細胞の分裂だとか，そういうことに使ってんのかなぁと思って…」と発言している。この２人の発言は，対数の考え方に関わるものであり，対数の考え方にそれぞれ価値を実感していると考えられる。つまり，調査授業を通して，生徒は対数のよさを実感したと言える。

5.3.3 生徒の学習意欲が向上したか

調査授業を通して，生徒の学習意欲が向上したかをインタビュー結果から考察する。筆者は，調査授業を通して，対数や数学に対してどのように考えたかを生徒にインタビューした。その中で，Yuki は次のように発言している。

「普段の自分だったらやっぱこういうふうに気づかないっていうのもありましたし，普段そういうものの考え方自体もないんで，逆にこういう授業を受けて，あの…こういうふうに考えられるんだなっていうのもありましたし，こういう似たような問題出た時に自分はもしかしたらできるかも，授業を受けてできるようになったんだなっていう…まぁ実感がもらえたんで，正直言ってあの一…ためになりましたね。」

「やっぱ授業でもその…ちんぷんかんぷんただ適当に聞き流しするんじゃなく，やっぱ自分が興味を持って進んでやれた授業っていうのはやっぱ自分の身にもなりましたし，やってて達成感があったので，やっぱ，もうちょっとまぁ案外どんなことにでも興味を持てるようにやりたいなぁと。」

Yuki は調査授業を通して，ものの考え方を実感でき，達成感を得ており，授業に興味を持って取り組めたことがわかる。また，今回の授業で得たことをこれからの学習に興味を持って取り組もうと考えている。これは，今回の授業で得たものがあったことでこのような回答をしていると考えられる。つまり，調査授業を通して，生徒の学習意欲が向上したと言える。しかし，対数とはどのようなものかという質問に対する明確な答えを見出すことはできなかった。このように，調査授業を通して，生徒の自主的・

自発的学習によって対数のよさを実感し，学習意欲が向上するという一連の流れが具現化されていることを確認するに至った。

6. 本稿のまとめと今後の課題

現在の対数学習は，対数を学ぶ意義や価値を実感しにくい内容や扱いに陥っており，生徒が対数そのものを考えることができないまま対数学習が進められている現状にある。この現状を改善するためには，対数のよさを実感する対数学習を構築することが必要である。

対数のよさを実感する対数学習とは，等差数列と等比数列の表や計算尺，対数方眼紙などの仕組みを生徒が考える活動を通して，対数の存在を認識し，それらの素材に対数の性質が隠れていることを発見したり，対数の性質などの理解を深めたりする学習である。

調査では，明らかにした対数学習の導入部分に位置づく，細菌の増殖に関する問題の解決を通して，生徒が「2 つの等比数列の項の積が等差数列の項の和に対応する」という等差数列と等比数列の表の仕組みを理解し，対数の性質を考える学習を実施した。その結果，その学習が，生徒が問題解決に主体的に取り組み，対数の考え方に価値を実感できる学習であることを確認することができた。明らかにした対数学習が現在の数学教育に位置づけられる可能性を示すことができたと考える。

今後の課題は，明らかにした対数学習の導入部分について，生徒が対数とは何かを考え，対数そのものを実感できるような学習展開を検討していくことである。また，授業実践を通して，本稿で示した対数学習の展開部分や発展部分の学習を現在の数学教育に位置づけることに取り組み，対数のよさを実感する対数学習に関する研究と実践をさらに発展させていきたい。

【引用・参考文献】

Evangelos N.Panagiotou(2011)，Using History to Teach Mathematics：The Case of Logarithms，*Science & Education*，Volume 20，Number 1，pp.1－35.

江藤邦彦(1985),『実生活に活きる数学の授業』，日本書籍，p.131.

小倉金之助補訳(1997),『復刻版カジョリ初等数学史』，共立出版.

片野善一郎(1995),『数学史の利用』，共立出版.

熊倉啓之(2012),「学ぶ意義を実感させる対数および対数関数の指導に関する研究」，日本数学教育学会第 45 回数学教育論文発表会論文集，pp.689－694.

計算尺推進委員会 http://www.pi-sliderule.net/sliderule/kids/pdfKids.pdf

志賀浩二(1999),『数の大航海－対数の誕生と広がり－』，日本評論社.

清水辰次郎ら(1951)，『解析 1 下』，三省堂出版，p.136.

数学学習指導研究会(1952),『高等学校数学解析 1』，中教出版，p.202.

菅原正巳(1951)，『解析 1』，大日本図書，p.254.

蒔苗直道(2011),「戦後教育改革期にみる数学教育における「よさ」の用語の起源－GHQ/SCAP 文書の分析を通して－」, 日本数学教育学会誌『数学教育』，第 93 巻，第 5 号，pp.2－11.

三浦伸夫(2013)，『数学の歴史』，放送大学教育振興会.

湊・浜田(1994),「プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか－数学観と数学カリキュラム論との接点の存在－」, 日本数学教育学会誌『数学教育』，第 76 巻，第 3 号，pp.2－8.